

# Variétés à bord et topos lisses\*

Horacio Porta et Gonzalo E. Reyes  
University of Illinois (Urbana-Champaign)  
et  
Université de Montréal

October 2004

## 1 Première section

Dans [2], E. Dubuc introduit la notion de *modèle bien adapté de la Géométrie différentielle synthétique (GDS)* (Cf. aussi [4]) et construit un tel modèle, montrant ainsi que la GDS est applicable à l'étude des variétés lisses classiques (sans bord). Ces modèles sont, en effet, bien adaptés au calcul différentiel, mais le développement du calcul intégral dans le contexte de la GDS ou des topos lisses (Cf. [5]) demande une notion d'adaptation plus fine. En effet, le calcul intégral emploie la notion d'intervalle fermé, notion qui est modelée plutôt par les variétés à bord telles que  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , et même par les variétés à coins. Le but de cet Exposé est d'étudier le problème de plonger d'une façon adéquate les variétés à bord dans les divers topos lisses.

L'outil principal se révèle être le résultat suivant de Whitney

**Théorème 1.1 ([12])** *Soit  $f(t, \bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  telle que  $f(t, \bar{x}) = f(-t, \bar{x})$ . Alors il existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  telle que  $f(t, \bar{x}) = g(t^2, \bar{x})$ .*

On remarque d'abord une conséquence

---

\*Voir note à la fin de l'article.

**Corollaire 1.2** La catégorie  $\mathcal{M}$  de variétés sans bord est dense dans la catégorie  $\mathcal{M}_\partial$  de variétés à bord au sens suivant: si  $B \in \mathcal{M}_\partial$ , alors  $B = \text{colim}_{\{M \rightarrow B\}} M$  où  $\{M \rightarrow B\}$  est la catégorie dont les objets sont les fonctions lisses  $M \rightarrow B$  (avec  $M \in \mathcal{M}$ ) et les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & B & \\ & \nearrow & \\ M' & & \end{array}$$

*Preuve:* Soit  $C \in \mathcal{M}_\partial$  ayant la propriété que pour chaque  $M \rightarrow B$  on se donne  $M \rightarrow C$  tel que si

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & B & \\ & \nearrow & \\ M' & & \end{array}$$

commute, alors

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & C & \\ & \nearrow & \\ M' & & \end{array}$$

commute aussi.

Cette donnée définit une fonction (d'ensemble)  $f : B \rightarrow C$  qui est *lisse sur chemins* au sens suivant: pour chaque  $\phi : M \rightarrow B \in C^\infty$ ,  $f \circ \phi \in C^\infty$ . Nous allons montrer que  $f \in C^\infty$ . En considérant l'inclusion  $\text{Int}(B) = B^\circ \subset B$

on voit que  $f$  est  $C^\infty$  aux points de  $B^o$  (car  $B^o$  est une variété sans bord). Il suffit donc de montrer que  $f$  est  $C^\infty$  aux points de  $\partial B$ . Soit  $p \in \partial B$ . En prenant des coordonnées locales aux alentours de  $p$  et  $f(p)$  on peut supposer que

$$B = \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

Soit  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n \in C^\infty$  la fonction définie par

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$$

Alors  $f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2) \in C^\infty$  et ceci implique que  $f \in C^\infty$ , par le théorème de Whitney  $\square$

**Corollaire 1.3** *Toute fonction lisse sur chemins  $f : B \rightarrow C$  où  $B, C \in \mathcal{M}_\partial$  est  $C^\infty$ .*

**Remarque 1.4** Une autre conséquence de ce théorème est la suivante:  $\mathbb{H} = \mathbb{R}_{\geq 0}$  est colimit du diagramme (dans  $\mathcal{M}_\partial$ )

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \\ \downarrow -x & \nearrow x^2 & \\ \mathbb{R}_{\geq 0} & & \end{array}$$

## 2 Deuxième section

Il semble tentant d'argumenter de la façon suivante: si la catégorie  $\mathcal{M}$  a été déjà plongée dans un topos  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}_\partial$  est dense, alors l'extension de Kan du plongement le long  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}_\partial$  doit donner le plongement cherché de  $\mathcal{M}_\partial$  dans  $\mathcal{E}$ . Mais il faut résister à cette tentation. D'abord, nous avons

**Proposition 2.1** *Soit  $i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  le plongement canonique dans le topos lisse de SGA4 (Cf. Exposé 5). Si  $\Sigma_i : \mathcal{M}_\partial \rightarrow \mathcal{E}$  est l'extension de Kan de  $i$  le long  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}_\partial$ , alors*

$$\Sigma_i(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \{x \in R \mid \exists y \in \mathbb{R} (x = y^2)\}$$

*Preuve:* On emploie la remarque précédente, en observant que  $x^2$  se factorise dans  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 i(\mathbb{R}) = R & & \\
 \downarrow -x & \nearrow x^2 & \searrow x^2 \\
 & \{x \in R \mid \exists y \in R (x = y^2)\}^c & \rightarrow \Sigma_i(\mathbb{R}_{\geq 0}) \\
 i(\mathbb{R}) = R & \nearrow x^2 & \searrow x^2
 \end{array}$$

Une conséquence désagréable est que  $\Sigma_i$  n'est pas pleine. En effet, dans le cas contraire,  $\Gamma$  établirait une bijection

$$\frac{f : R \longrightarrow \{x \in R \mid \exists y \in R (x = y^2)\} \in \mathcal{E}}{F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \in \mathcal{M}_\partial}$$

et on pourrait conclure à l'existence d'un recouvrement  $\{U_\alpha\}$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $F|_{U_\alpha}$  est un carré. Autrement dit, toute fonction  $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \in C^\infty$  est (localement) un carré. Mais ceci est faux et un exemple a été donné par Muñoz Díaz [10]. Un autre exemple, plus simple, nous a été signalé par A. Douady:

$$F(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin^2 1/x + e^{-4/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut vérifier que  $(\sqrt{F})''(1/n\pi) \rightarrow \infty$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Une autre difficulté: dans le développement du calcul intégral dans [5], on requiert que  $R_{\geq 0} \hookrightarrow R$  soit étale. (C'est-à-dire que  $\forall d \in D \ (t+d) \in R_{\geq 0}$  à la condition que  $t \in R_{\geq 0}$ ). En particulier on devrait avoir alors  $\forall d \in D \ \exists y \in R \ (d = y^2)$  ce qui est faux dans le topos de Dubuc [2], ainsi que dans tous les modèles bien adaptés considérés jusqu'au présent. [[Dans [8], les auteurs construisent un topos ayant la propriété que tout  $x \in R_{\geq 0}$  possède une racine carrée]].

### 3 Troisième section

[[Nous allons définir la notion de *topos lisse* qui est employée dans le reste de l'article.

Soit  $\mathcal{I}$  une classe d'idéaux d'anneaux  $C^\infty$  libres à un nombre fini de générateurs, c'est-à-dire, chaque  $I \in \mathcal{I}$  est un idéal de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  pour un certain  $n \geq 0$ . On notera  $\mathcal{C}(\mathcal{I})$  la sous-catégorie pleine des anneaux  $C^\infty$  possèdant une présentation de la forme  $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$  où  $I \in \mathcal{I}$ . On muni  $\mathcal{C}(\mathcal{I})$  d'une structure de site au moyen de co-recouvrements et on note  $\widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$  le topos de faisceaux sur ce site (les recouvrements seront sous-entendus).

Nous dirons qu'un topos  $\widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$  est *lisse* s'il satisfait les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (0) \in \mathcal{I}, \text{ c'est à dire, } C^\infty(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{C}(\mathcal{I}) \\ \mathcal{I} \text{ contient les idéaux de définition des algèbres de Weil} \\ \quad I \in \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}^* \in \mathcal{I} \\ \quad \text{chaque } I \in \mathcal{I} \text{ est } \mathbb{W}\text{-déterminé} \\ \mathcal{C}(\mathcal{I}) \text{ possède une structure de site standard} \\ \quad h_0^{C^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})} \text{ est un faisceau} \end{array} \right.$$

Rappelons qu'un idéal  $I \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$  est  *$\mathbb{W}$ -déterminé* ou *déterminé par ses points proches* si pour tout  $f : h^{C^\infty(\mathbb{R}^n)}/I \longrightarrow R$  dans  $Ens^{(C^\infty-alg)_{TF}}$ ,  $f = 0$  ssi pour toute algèbre de Weil  $W$  et tout  $\phi : h^W = \overline{W} \longrightarrow h^{C^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ,  $f \circ \phi = 0$ . Cette notion coincide avec celle d'idéal fermé pour la topologie de Whitney. En plus ces idéaux sont de nature locale (Cf. [7] où ces idéaux sont appellés "near-point determined"). Notons finalement que l'inclusion des idéaux de définition des algèbres de Weil dans  $\mathcal{I}$  garantie que l'axiome généralisé de Kock-Lawvere est valide dans le topos  $\widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$ . Ainsi, tout topos lisse satisfait cet axiome.]

Une solution possible au problème de plonger les variétés à bord dans un topos lisse est de représenter  $B \in \mathcal{M}_\partial$  "de l'extérieur": on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_\partial \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})} \\ B \longmapsto h_0^{C^\infty(B)} \end{array} \right.$$

où  $h_0^{C^\infty(B)}(A) = C^\infty - alg(C^\infty(B), A)$ .

Une autre possibilité, signalée par Ngo van Quê, est de "doubler"  $B$  pour obtenir une variété sans bord  $D(B)$  contenant  $B$  comme variété fermée (Cf.[9]). On peut définir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_\partial \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})} \\ B \longmapsto ah_0^{C^\infty(D(B))} \end{array} \right.$$

où

$$C_B^\infty(D(B)) = C^\infty(D(B))/\{f \mid \exists U \text{ ouvert } B \subset U \subset D(B) \text{ } f|_U \equiv 0\}$$

On remarquera que  $D(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}$ .

Notons qu'on a un diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(D(B)) & \\ \swarrow & & \searrow \\ C^\infty(D(B)) & \xrightarrow{\quad} & C^\infty(B) \simeq C^\infty(D(B))/\{\phi \mid \phi|_B \equiv 0\} \end{array}$$

Dans certain cas, ces deux possibilités se confondent.

**Proposition 3.1** *Si  $\mathcal{E}$  est un topos lisse, alors le morphisme*

$$h_0^{C^\infty(B)} \hookrightarrow ah_0^{C_B^\infty(B)}$$

*obtenu de l'application canonique décrite plus haut est un isomorphisme.*

*Preuve:* Nous allons montrer que l'idéal  $I = \{\phi \in C^\infty(D(B)) \mid \phi|_U = 0 \text{ pour quelque } B \subset U \subset D(B)\}$  est dense dans  $J = \{\phi \in C^\infty(D(B)) \mid \phi|_B = 0\}$ .

**Lemme 3.2** *Soit  $I \subset C^\infty(M)$  un idéal et  $M$  une variété. Alors, si  $\overline{I}$  est la fermeture de  $I$  pour la topologie de Whitney, pour tout ouvert  $U \subset M$*

$$\overline{I|_U} = \overline{I}|_U \subset C^\infty(U)$$

*Preuve:* L'idéal  $I|_U$  étant fermé dans  $C^\infty(U)$ , on conclut que  $\overline{I|_U} \subset \overline{I}|_U$ . D'autre part, soit  $f \in I|_U$ . Alors  $\exists g \in \overline{I}$  tel que  $f = g|_U$ . Soient  $\epsilon > 0$ ,  $K$  compact  $\subset U$ ,  $m \geq 0$  donnés. Il faut montrer que  $\exists h \in I|_U$  tel que  $|D^\alpha f - D^\alpha h|_{\alpha \leq m}^K < \epsilon$ . Mais  $g \in \overline{I}$  implique que  $\exists h' \in I$  tel que  $|D^\alpha f - D^\alpha h'|_{\alpha \leq m}^K < \epsilon$  car  $K \subset M$  est encore compact. On prend  $h = h'|_U \in I|_U$ .  $\square$

Soit  $\phi \in J$ . Nous montrerons que  $\phi \in \overline{I}$  ou, ce qui revient au même (car  $\overline{I}$  est de nature locale), que  $\phi|_{U_\alpha} \in \overline{I}|_\alpha$  pour un certain recouvrement  $\{U_\alpha\}_\alpha$  de  $D(B)$ . Choisissons un tel recouvrement de façon tel que

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\sim} & U_\alpha & \hookrightarrow & D(B) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{\sim} & H_\alpha & \hookrightarrow & B
\end{array}$$

où  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$ . En employant le théorème spectral de Whitney (Cf. [6]), on démontre facilement que

$$\overline{I|_{U_\alpha}} = J|_{U_\alpha}$$

Mais  $\phi \in J$ , donc  $\phi|_{U_\alpha} \in J|_{U_\alpha} = \overline{I|_{U_\alpha}} = \overline{I}|_{U_\alpha}$ .

On conclut la preuve de la proposition en observant que

$$C^\infty(D(B))/I \longrightarrow C^\infty(D(B))/\overline{I}$$

est le complété séparé de  $C^\infty(D(B))/I$ . En particulier si chaque  $J \in \mathcal{I}$  est fermé,  $C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$  est une algèbre séparée et elle ne distingue pas entre ces deux algèbres. (On peut remarquer que nous avons démontré un résultat un peu plus général: seulement la propriété que chaque idéal dans  $\mathcal{I}$  est  $\mathbb{W}$ -déterminé a été employée).  $\square$

Si  $\mathcal{E}$  est un topos lisse, et  $B$  une variété à bord, nous noterons  $\underline{B} = h_0^{C^\infty(B)} = ah_0^{C_B^\infty(D(\bar{B}))}$ .

**Proposition 3.3** *Dans tout topos lisse,  $\underline{B} \times M = \underline{B} \times \underline{M}$ .*

*Preuve:* (suggérée par Ngo van Quê). En employant le théorème de plongement de Whitney (Cf. [9]), on peut plonger  $B$  et  $M$  comme sous variétés fermées de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ , respectivement. On vérifie facilement que

$$C^\infty(B) \otimes_\infty C^\infty(M) = C^\infty(\mathbb{R}^{n+m}) / \{\phi(\bar{x})|\phi|_B = 0\} \cup \{\psi(\bar{y})|\psi|_{B \times M} = 0\}$$

$$C^\infty(B \times M) = C^\infty(\mathbb{R}^{n+m}) / \{\theta(\bar{x}, \bar{y})|\theta|_{B \times M} = 0\}$$

Mais une application du théorème spectral de Whitney (Cf. [6]) montre que le premier idéal est dense dans le deuxième, c'est-à-dire,

$$h_0^{C^\infty(B)} \times h_0^{C^\infty(M)} = h_0^{C^\infty(B) \otimes_\infty C^\infty(M)} = h_0^{C^\infty(B \times M)}$$

dans  $Ens^{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$ , ce qui implique la conclusion (même argument que celui de la Proposition précédente).

## 4 Quatrième section

Nous allons maintenant étudier la plénitude du plongement des variétés à bord.

**Proposition 4.1** *Soit  $\widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$  un topos lisse. Alors le foncteur*

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\partial \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})} \\ B \mapsto \underline{B} = h_0^{C^\infty(B)} \simeq h_0^{C_B^\infty(D(B))} \end{cases}$$

*est pleinement fidèle et préserve les produits de la forme  $B \times M$ .*

*Preuve:* La préservation des produits suit de la section précédente, en tenant compte de la nature locale des idéaux  $\mathbb{W}$ -determinés. La plénitude est plus cachée et requiert des développements supplémentaires.

Si  $B$  est une variété à bord et  $W$  une algèbre de Weil, on définit une variété (à bord)  ${}^W B$ =variété des *points W-proches de B* dont l'ensemble sousjacent est  $C^\infty - \text{alg}(C^\infty(B), W)$  de façon telle qu'on obtient une bijection

$$\frac{\phi : M \longrightarrow {}^W B \in \mathcal{M}_\partial}{\psi : C^\infty(B, M) \longrightarrow C^\infty(M, X) \in C^\infty-\text{alg}} \quad \phi(m)(f) = \psi(f)(m)$$

où  $M$  est une variété sans bord. Voir lemme 4.3 ci-bas pour définir un atlas sur  ${}^W B$  (Cf. [2] et [11] lorsque  $\partial B = \emptyset$ ).

**Lemme 4.2** *Le diagramme suivante (dans  $\mathcal{M}_\partial$ ) est un produit fibré*

$$\begin{array}{ccc} {}^W \mathbb{H}^{n \subset} & \longrightarrow & {}^W \mathbb{R}^n \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathbb{H}^{n \subset} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

où  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) | x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ .

*Preuve:* Il faut construire un  $\tilde{\phi}$  tel qu'indiqué

$$\begin{array}{ccccc}
& & C^\infty(\mathbb{R}^n) & & \\
& \tau \downarrow & \swarrow \phi & \searrow ev(p) & \\
C^\infty(\mathbb{H}^n) & \dashrightarrow_{\bar{\phi}} & W & \xrightarrow{\pi_0} & \mathbb{R} \\
& & \pi_1 \downarrow & & \\
& & m_W & &
\end{array}$$

où  $p \in \mathbb{H}^n$ .

Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tel que  $f|_{\mathbb{H}^n} = 0$ . Alors  $\phi(f) = f_W(p + \pi_1(\phi))$  peut se développer en série finie de Taylor aux alentours de  $p$ . Mais toutes les dérivées sont nulles (car  $f|_{\mathbb{H}^n} = 0$ ) et on conclut que  $\phi(f) = 0$ , c'est-à-dire,  $\tilde{\phi}$  existe.

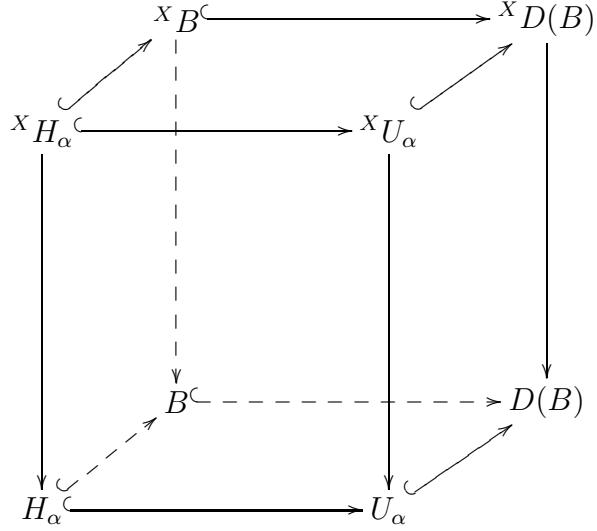
**Lemme 4.3** Soit  $\{U_\alpha\}_\alpha$  un recouvrement de  $D(B)$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_\alpha & \hookrightarrow & D(B) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{K}^n & \longrightarrow & H_\alpha & \hookrightarrow & B
\end{array}$$

$PF$

où  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{K}^n = \mathbb{H}^n$ . Alors  ${}^X B = \bigcup_\alpha {}^X H_\alpha$ .

*Preuve:* On chasse dans le diagramme



en remarquant que  $\bigcup_\alpha {}^X U_\alpha = {}^X D(B)$ . (Cf. [2])

**Corollaire 4.4** *Le diagramme suivant est un produit fibré*

$$\begin{array}{ccc}
{}^B W^C & \longrightarrow & {}^W D(B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}^B C & \longrightarrow & D(B)
\end{array}$$

**Lemme 4.5**  $\Gamma(\underline{B}^{\overline{W}}) = {}^W B$

*Preuve:* On a les bijections suivantes

$$\begin{array}{c}
x : 1 \longrightarrow \underline{B}^{\overline{W}} \\
\hline
x : h^W = \overline{W} \longrightarrow B = h_0^{C^\infty(B)} \\
\hline
x : C^\infty(B) \longrightarrow W \\
\hline
x \in {}^W B
\end{array}$$

Retournons à la preuve de notre Proposition. Soit  $f : \underline{B} \longrightarrow \underline{C} \in \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$ . Alors  $\Gamma(f) : B \longrightarrow C$  est lisse sur chemins et ceci implique (Corollaire du théorème de Whitney de la Première section) que  $\Gamma(f) \in C^\infty$ .

Pour montrer que le foncteur

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\partial \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})} \\ B \longmapsto \underline{B} = h_0^{C^\infty(B)} \end{cases}$$

est pleinement fidèle, il suffit de montrer que si  $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ , alors  $f = g$  où  $f, g : \underline{B} \longrightarrow \underline{C} \in \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$  et  $B, C \in \mathcal{M}_\partial$ .

Par le théorème du plongement de Whitney (Cf. [9]) il existe un plongement fermé  $C \subset \mathbb{R}^m$  et il suffit de démontrer:

$$(*) \text{ Si } f : \underline{B} \longrightarrow R \text{ est tel que } \Gamma(f) = 0, \text{ alors } f = 0$$

Autrement dit, il suffit de montrer

$$(**) \forall \overline{W} \forall \phi : \overline{W} \longrightarrow R \text{ (} f \circ \phi = 0 \text{)}$$

car chaque  $I \in \mathcal{I}$  is  $\mathbb{W}$ -déterminé.

Par adjonction exponentielle, on obtient

$$1 \xrightarrow{x} \underline{B}^{\overline{W}} \xrightarrow{f^{\overline{W}}} R^{\overline{W}}$$

En employant le recouvrement de  $B$  du lemme 4.3, nous montrons l'existence d'une bijection

$$(***) \frac{H_\alpha^{\overline{W}} \hookrightarrow \underline{B}^{\overline{W}} \longrightarrow R^{\overline{W}}}{W \underset{\mathbb{H}_\alpha}{\underset{\xrightarrow{W_{(f \circ i_\alpha)}}}{\longrightarrow}} W \underset{\mathbb{R}}{\longrightarrow}}$$

où  $\mathbb{H}_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} B$ .

Montrons que (\*\*\* suffit pour finir la preuve. En effet,  $\Gamma(\underline{B}^{\overline{W}}) =^W B$  par le lemme 4.5. Ceci implique que  $x \in^W B$ , c'est-à-dire (par le lemme 4.3)  $x \in^W H_\alpha$  pour quelque  $\alpha$  et on a une factorisation

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{x} & \underline{B}^{\overline{W}} & \xrightarrow{f^{\overline{W}}} & R^{\overline{W}} \\ & \searrow x & \downarrow i_\alpha^{\overline{W}} & \nearrow f \circ i_\alpha^{\overline{W}} & \\ & & H_\alpha^{\overline{W}} & & \end{array}$$

Mais  $\Gamma(\underline{f \circ i_\alpha}^{\overline{W}}) =^W (f \circ i_\alpha) = 0$  et on peut conclure (par (\*\*\*)) que  $\underline{f \circ i_\alpha}^{\overline{W}} = 0$ , c'est-à-dire,  $f^{\overline{W}} \circ x = 0$ .

Pour démontrer (\*\*\*) , il suffit de considérer le cas suivant: soit

$$f^{\overline{W}} : (H^n)^{\overline{W}} \longrightarrow R^{\overline{W}}$$

tel que  $\Gamma(f^{\overline{W}}) = 0$ . Il faut montrer que  $f^{\overline{W}} = 0$ . Soit

$$Sq : R^n \longrightarrow H^n \in \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$$

défini par  $(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$ .

Alors  $\Gamma(f \circ Sq)^{\overline{W}} = \Gamma(f^{\overline{W}}) \circ \Gamma(Sq^{\overline{W}}) = 0$  et ceci implique ( $h^{C^\infty(\mathbb{R})}$  étant un faisceau) que

$$(f \circ Sq)^{\overline{W}} = f^{\overline{W}} \circ Sq^{\overline{W}} = 0$$

Mais  $t^2 : R \longrightarrow R_{\geq 0}$  est dense. Donc  $f^{\overline{W}} = 0$ .

## 5 Cinquième section

La Proposition de la section 4 s'applique au topos  $\mathcal{D}$  de Dubuc [2] dont le site est défini par les  $C^\infty$ -algèbres de la forme  $C^\infty(M) \otimes W$  et dont la structure est donné par les familles co-couvrantes

$$\{C^\infty(M) \otimes W \longrightarrow C^\infty(U_\alpha) \otimes W\}_\alpha$$

telles que  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ .

**Proposition 5.1**  $\mathcal{D}$  est un topos lisse.

*Preuve:* En effet,  $\mathcal{D} = \widetilde{\mathcal{C}(\mathcal{I})}$ , où  $\mathcal{I} = \{(I, J) | I \text{ est un idéal de définition d'une variété et } J \text{ un idéal de définition d'une algèbre de Weil}\}$ . Nous allons montrer d'abord que chaque  $(I, J) \in \mathcal{I}$  est  $\mathbb{W}$ -déterminé. Soient  $M$  et  $W$  la variété et l'algèbre de Weil définies par les idéaux  $I$  et  $J$ , respectivement et soit  $f : h^{C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \longrightarrow R$  tel que  $f \circ \phi = 0$  pour tout  $\phi : \overline{W} \longrightarrow h^{C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})}/(I, J)$ .

On doit montrer que  $f = 0$ .

Mais  $h^{C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})/(I,J)} \simeq h^{C^\infty(M)} \times \overline{W}$  et par adjonction et Yoneda, on obtient des bijections

$$\begin{array}{c} f \\ \hline \hat{f} : h^{C^\infty(M)} \longrightarrow R^{\overline{W}} \simeq h^{C^\infty(\mathbb{R}^k)} \\ \hline C^\infty(\mathbb{R}^k) \longrightarrow C^\infty(M) \\ \hline M \longrightarrow \mathbb{R}^k \end{array}$$

Ceci montre que  $f = 0$  pourvu que pour chaque  $m : \mathbb{1} \longrightarrow h^{C^\infty(M)}$ ,  $\hat{f} \circ m = 0$ . Mais étant donné un tel  $m$ , on obtient (par adjonction)

$$\overline{W} \xrightarrow{m \times \overline{W}} h^{C^\infty(M)} \times \overline{W} \xrightarrow{f} R$$

dont le composé est 0 (par hypothèse)  $\square$

Les autres hypothèses sont vérifiées dans [2], à l'exception du fait que  $h_0^{C^\infty(B)}$  est un faisceau, qui est démontré dans [3] (en passant par la théorie de spec).

**Théorème 5.2** *Le foncteur  $B \mapsto \underline{B} = h_0^{C^\infty(B)} = h_0^{C^\infty_B(D(B))}$  défini un plongement pleinement fidèle*

$$\mathcal{M}_\partial \longrightarrow \mathcal{D}$$

*qui préserve les produits de la forme  $M \times B$  (avec  $M \in \mathcal{M}$ ) et les réunions  $\bigcup_\alpha H_\alpha = B$  du lemme 4.3 (no. 4).*

*Preuve:* Tout ce qui reste à montrer c'est la dernière affirmation.

Soit  $\underline{M} \times \overline{W} \xrightarrow{f} B \in \mathcal{D}$ . Par adjonction exponentielle, on obtient  $\underline{M} \xrightarrow{\hat{f}} \underline{B}^{\overline{W}} \in \mathcal{D}$ . On considère le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \underline{M} & \xrightarrow{\hat{f}} & \underline{B}^{\overline{W}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{X}_\alpha & \longrightarrow & \underline{H}_\alpha^{\overline{W}} \end{array}$$

et on applique  $\Gamma$  (=sections globales) pour obtenir un diagramme (dans  $M_0$ )

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{\quad} & {}^W B & \xrightarrow{\quad} & B^\zeta & \xrightarrow{\quad} & D(B) \\
 \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \Gamma(X_\alpha) & \xrightarrow{\quad} & {}^W H_\alpha & \xrightarrow{\quad} & H_\alpha^\zeta & \xrightarrow{\quad} & U_\alpha
 \end{array}$$

*PF*

En se rapportant au diagramme du lemme 4.3 et en employant le lemme 4.2, on conclut que le carré central est aussi un produit fibré, donc le rectangle total est un produit fibré transversal. En particulier,  $M_\alpha = \Gamma(X_\alpha)$  est une sous-variété ouverte de  $M$  et l'on a  $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ . Mais ce produit fibré transversal est préservé par le plongement  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}_\partial \hookrightarrow \mathcal{D}$  (Cf ???) et on conclut que  $\Gamma(X_\alpha) = X_\alpha$  et  $\bigcup X_\alpha X_\alpha = M$   $\square$

Nous étudierons la question de plonger les variétés à coin dans un travail en préparation. [[Ce travail n'a pas vu la lumière du jour]].

**Note.** Cet article a été écrit en 1980 lors d'une visite de H. Porta à l'Université de Montréal, mais il n'avait pas été publié. Comme certains de ses résultats gardent encore de l'actualité (comme le témoigne un article récent de A. Kock et G.E. Reyes) le deuxième auteur a décidé de le remanier en corrigeant quelques erreurs, en ajoutant quelques définitions qui manquaient et en mettant au jour la terminologie quand le besoin s'en faisait sentir. Ces ajouts ont été écrits à l'intérieur des parenthèses [...]. Le premier auteur n'ayant pas eu l'occasion de reviser ni l'article original ni l'article remanié, le deuxième auteur accepte donc les responsabilités des erreurs.

## References

- [1] Artin, M., Grothendieck, A. et Verdier, J.L. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire Algèbrique du Bois Marie 1963-1964. Lecture Notes in Mathematics 269, Springer-Verlag, 1972.
  - [2] Dubuc, E. Sur les modèles de la Géométrie Différentielle Synthétique. *Cahiers de Top. et Géom. Diff.*, (20), 231-279, 1979.

- [3] Dubuc, E.  $C^\infty$ -schemes. *Amer. J. Math.* 103, 683-690, 1981.
- [4] Kock, A. Properties of well-adapted models for synthetic differential geometry. *J. Pure Appl. Alg.* (20), 55=70, 1981.
- [5] Kock, A. and Reyes, G.E. Models for Synthetic Integration Theory. *Math. Scand.*, (48): 145-152, 1981.
- [6] Malgrange, B. *Ideals of Differentiable Functions*. Oxford 1966.
- [7] Moerdijk, I. and Reyes, G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer-Verlag 1991.
- [8] Moerdijk, I., van Quê, N. and Reyes, G.E. Forcing smooth square roots and integration. *Fund. Math.* 128, 145-158, 1987.
- [9] Munkres, J.R. *Elementary Differential Topology*. Annals of Math. Studies 54, Princeton 1966.
- [10] Muñoz Díaz, J. Caracterización de las álgebras diferenciables y síntesis espectral para módulos sobre tales álgebras. *Collectanea Mathematica* vol. XXIII, fascículo 1<sup>o</sup>, 17-83, 1972.
- [11] Weil, A. Théorie des point proches sur les variétés différentiables. *Colloq. Top. et Géom. Diff.*, 111-117, Strasbourg 1953.
- [12] Whitney, H. Differentiable even functions. *Duke Journal of Math.*, vol 10, 159-160, 1943.